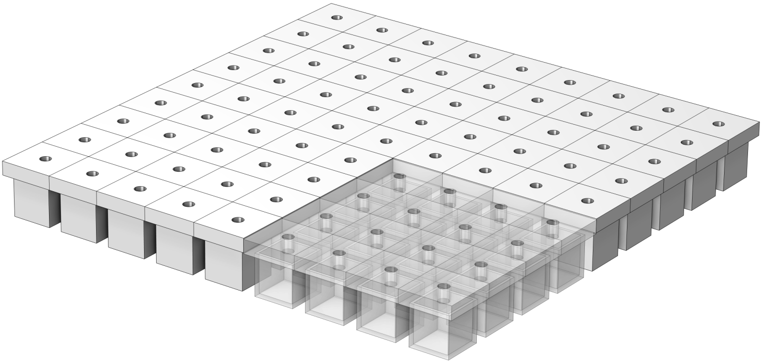
Homogénéisation asymptotique à 3 échelles d'une méta-surface/méta-interface acoustique composée de résonateurs de Helmholtz 3D

Sarah TACHET, Kim PHAM, Agnes MAUREL

Juin 2024

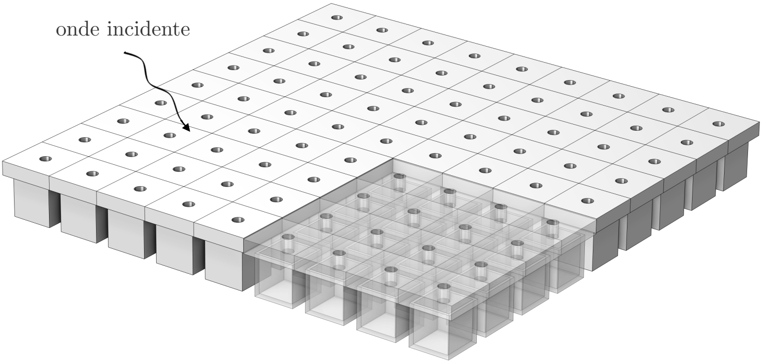
I. Problème étudié



Réseau périodique de résonateurs de Helmholtz 3D

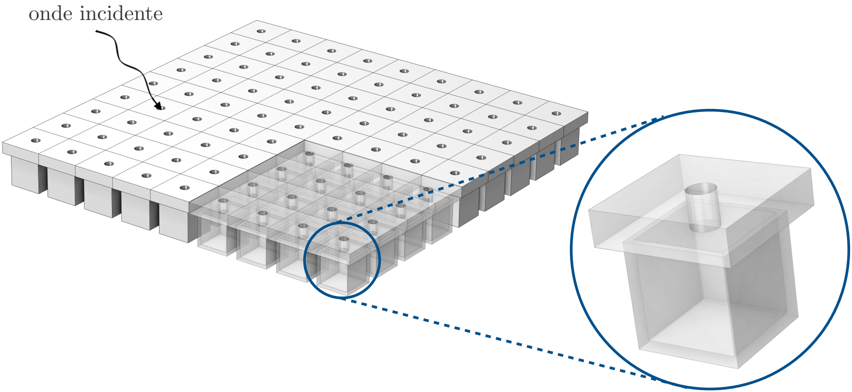
formant une métasurface réflective

I. Problème étudié



Réseau périodique de résonateurs de Helmholtz 3D
formant une métasurface réflective

I. Problème étudié

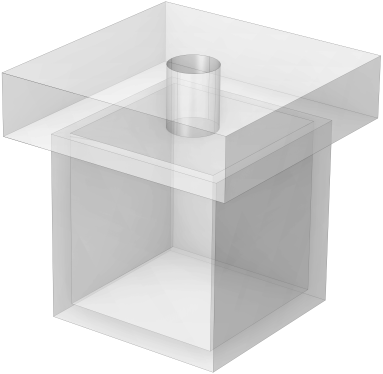


Réseau périodique de résonateurs de Helmholtz 3D
formant une métasurface réflective

Equations d'Euler linéarisées

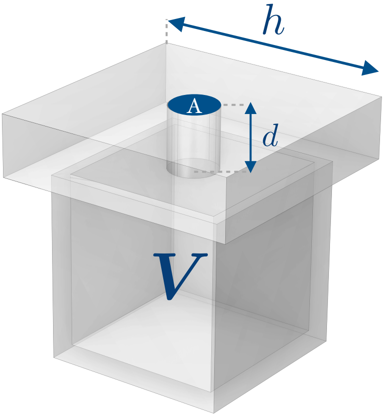
$$\begin{cases} \mathrm{div}\boldsymbol{u} + \dfrac{1}{\rho c^2}\dfrac{\partial p}{\partial t} = 0, \\ \rho\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\nabla p, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \text{ parois rigides}$$



2. Approche asymptotique

Régime sub-longueur d'onde $\quad \eta = \dfrac{\omega}{c} h \sim \dfrac{h}{\lambda} \ll 1$

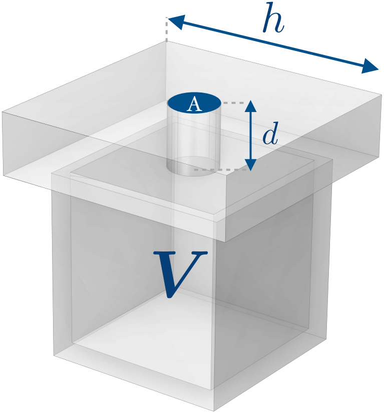


2. Approche asymptotique

Régime sub-longueur d'onde $\eta = \frac{\omega}{c} h \sim \frac{h}{\lambda} \ll 1$

+ Régime résonant

$$\omega_{\mathrm{H}} = c\sqrt{\frac{A}{dV}} \sim O(\omega)$$



2. Approche asymptotique

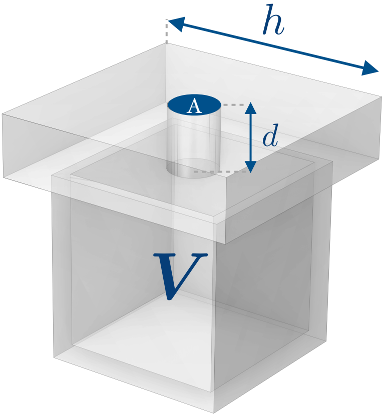
Régime sub-longueur d'onde $\eta = \frac{\omega}{c} h \sim \frac{h}{\lambda} \ll 1$

+ Régime résonant

$$\omega_{\mathrm{H}} = c\sqrt{\frac{A}{dV}} \sim O(\omega)$$

ω_{H} va aussi vite vers 0 que ω si

$$\frac{\omega_{\mathrm{H}} h}{c} = \sqrt{\frac{A}{dV}} h \sim O(\eta)$$



2. Approche asymptotique

Régime sub-longueur d'onde $\eta = \dfrac{\omega}{c} h \sim \dfrac{h}{\lambda} \ll 1$

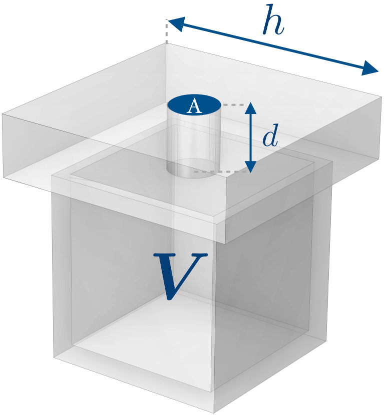
+ Régime résonant

$$\omega_{\mathrm{H}} = c\sqrt{\frac{A}{dV}} \sim O(\omega)$$

ω_{H} va aussi vite vers 0 que ω si

$$\frac{\omega_{\mathrm{H}} h}{c} = \sqrt{\frac{A}{dV}}\, h \sim O(\eta)$$

avec $d, V^{1/3}, h \sim O(\eta)$,



2. Approche asymptotique

Régime sub-longueur d'onde $\eta = \frac{\omega}{c} h \sim \frac{h}{\lambda} \ll 1$

+ Régime résonant

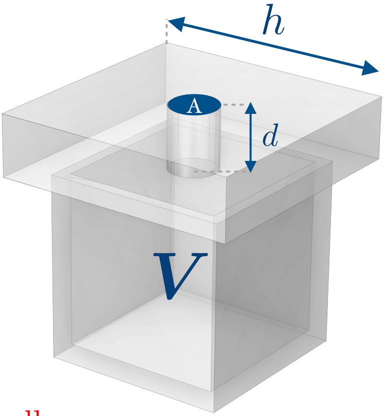
$$\omega_{\mathrm{H}} = c\sqrt{\frac{A}{dV}} \sim O(\omega)$$

ω_{H} va aussi vite vers 0 que ω si

$$\frac{\omega_{\mathrm{H}} h}{c} = \sqrt{\frac{A}{dV}} h \sim O(\eta)$$

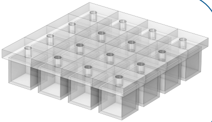
avec $d, V^{1/3}, h \sim O(\eta)$,

on impose $\boxed{\sqrt{A} \sim O(\eta^2)}$ $\Longrightarrow$ 3 échelles



2. Approche asymptotique : les 3 échelles

Echelle macro (échelle de la longueur d'onde)

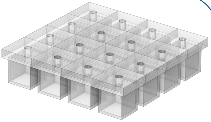


On cherche la condition limite qui remplace la condition de mur rigide sans résonateur (col fermé)

(les autres échelles ont vocation à disparaître)

2. Approche asymptotique : les 3 échelles

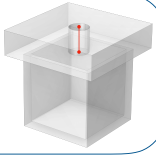
Echelle macro (échelle de la longueur d'onde)



On cherche la condition limite qui remplace la condition de mur rigide sans résonateur (col fermé)

(les autres échelles ont vocation à disparaître)

Echelle meso (zoom en $1/\eta$ sur un résonateur)



2 régions déconnectées (intérieur et extérieur de la cavité)

la région du col a disparu (elle tend vers 0 plus vite que η)

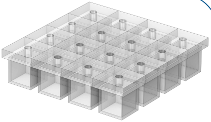
Elle est réduite à un segment (le col) terminé par deux points (singuliers ?)

2. Approche asymptotique : les 3 échelles

Echelle macro (échelle de la longueur d'onde)

On cherche la condition limite qui remplace la condition de mur rigide sans résonateur (col fermé)

(les autres échelles ont vocation à disparaître)

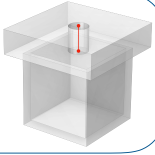


Echelle meso (zoom en $1/\eta$ sur un résonateur)

2 régions déconnectées (intérieur et extérieur de la cavité)

la région du col a disparu (elle tend vers 0 plus vite que η)

Elle est réduite à un segment (le col) terminé par deux points (singuliers ?)



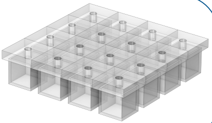
Pour restaurer la communication entre les deux régions, on zoome davantage (en $1/\eta^2$)

2. Approche asymptotique : les 3 échelles

Echelle macro (échelle de la longueur d'onde)

On cherche la condition limite qui remplace la condition de mur rigide sans résonateur (col fermé)

(les autres échelles ont vocation à disparaître)

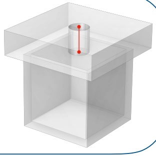


Echelle meso (zoom en $1/\eta$ sur un résonateur)

2 régions déconnectées (intérieur et extérieur de la cavité)

la région du col a disparu (elle tend vers 0 plus vite que η)

Elle est réduite à un segment (le col) terminé par deux points (singuliers ?)

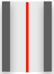


Pour restaurer la communication entre les deux régions, on zoome davantage (en $1/\eta^2$)

Echelle micro (zoom en $1/\eta^2$ sur le col)

3 problèmes d'écoulements potentiels

entrée du col



le col

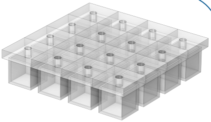
sortie du col

2. Approche asymptotique : les 3 échelles

Echelle macro (échelle de la longueur d'onde)

On cherche la condition limite qui remplace la condition de mur rigide sans résonateur (col fermé)

(les autres échelles ont vocation à disparaître)

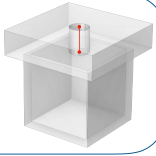


Echelle meso (zoom en $1/\eta$ sur un résonateur)

2 régions déconnectées (intérieur et extérieur de la cavité)

la région du col a disparu (elle tend vers 0 plus vite que η)

Elle est réduite à un segment (le col) terminé par deux points (singuliers ?)

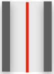


Pour restaurer la communication entre les deux régions, on zoome davantage (en $1/\eta^2$)

Echelle micro (zoom en $1/\eta^2$ sur le col)

3 problèmes d'écoulements potentiels

entrée du col

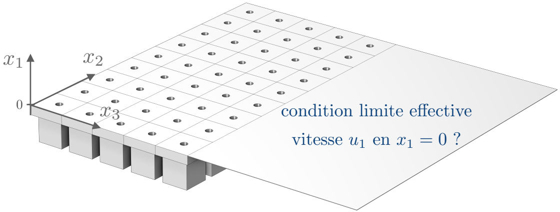


le col

sortie du col

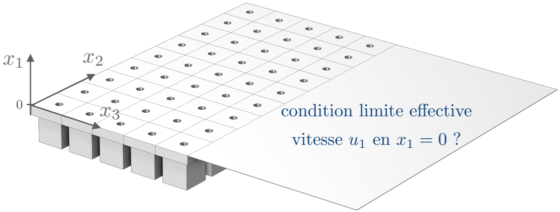
Les 3 échelles communiquent via des raccordements asymptotiques

3. Problème effectif obtenu : de l'ordre 0 à l'ordre 2



$$\boldsymbol{x}' = (x_2, x_3)$$

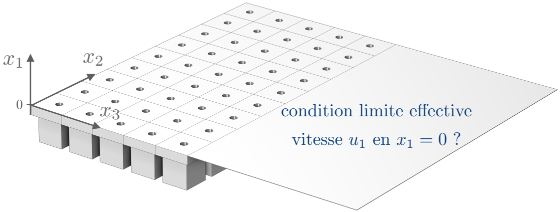
3. Problème effectif obtenu : de l'ordre 0 à l'ordre 2



$$\boldsymbol{x}' = (x_2, x_3)$$

A l'ordre 0 $\quad u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = 0 \quad$ (ce qui est le cas en dehors de la résonance)

3. Problème effectif obtenu : de l'ordre 0 à l'ordre 2



$$\boldsymbol{x}' = (x_2, x_3)$$

A l'ordre 0 $\quad u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = 0 \quad$ (ce qui est le cas en dehors de la résonance)

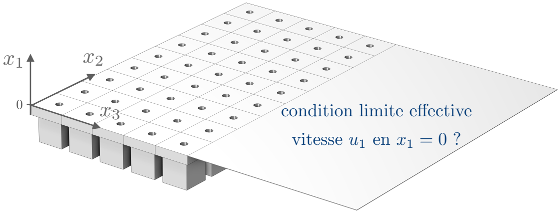
Aux ordres n=1 et 2 $\quad$ condition de Robin qui couple u_1 à p_c

p_c solution de l'equation d'un résonateur (avec source p en $x_1 = 0$)

$$u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = -\alpha \frac{\partial p_c}{\partial t}(\boldsymbol{x}', t), \qquad \alpha = \frac{V}{\rho c^2 h^2}$$

$$\frac{\partial^2 p_c}{\partial t^2} + \omega_n^2 p_c = \omega_n^2 p(0, \boldsymbol{x}', t), \quad n = 1, 2$$

3. Problème effectif obtenu : de l'ordre 0 à l'ordre 2



$$\boldsymbol{x}' = (x_2, x_3)$$

A l'ordre 0 $\quad u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = 0$ (ce qui est le cas en dehors de la résonance)

Aux ordres n=1 et 2 $\quad$ condition de Robin qui couple u_1 à p_c

p_c solution de l'equation d'un résonateur (avec source p en $x_1 = 0$)

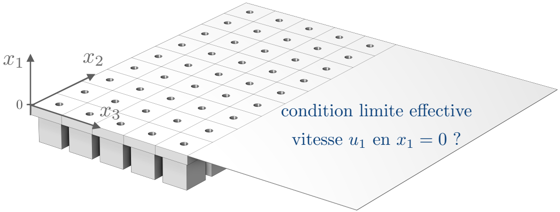
$$u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = -\alpha \frac{\partial p_c}{\partial t}(\boldsymbol{x}', t), \qquad \alpha = \frac{V}{\rho c^2 h^2}$$

$$\frac{\partial^2 p_c}{\partial t^2} + \omega_n^2 p_c = \omega_n^2 p(0, \boldsymbol{x}', t), \quad n = 1, 2$$

$$\omega_n = c\sqrt{\frac{A}{d_n V}}, \qquad d_1 = d,$$

à l'ordre 1, une canette de soda ne résonne pas,

3. Problème effectif obtenu : de l'ordre 0 à l'ordre 2



$$\boldsymbol{x}' = (x_2, x_3)$$

A l'ordre 0 $\quad u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = 0$ (ce qui est le cas en dehors de la résonance)

Aux ordres n=1 et 2 $\quad$ condition de Robin qui couple u_1 à p_c

p_c solution de l'equation d'un résonateur (avec source p en $x_1 = 0$)

$$u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = -\alpha \frac{\partial p_c}{\partial t}(\boldsymbol{x}', t), \qquad \alpha = \frac{V}{\rho c^2 h^2}$$

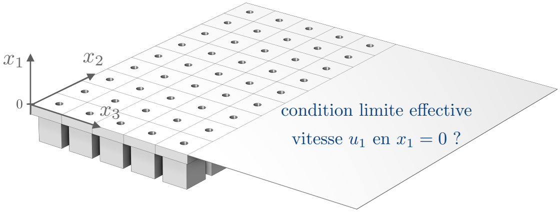
$$\frac{\partial^2 p_c}{\partial t^2} + \omega_n^2 p_c = \omega_n^2 p(0, \boldsymbol{x}', t), \quad n = 1, 2$$

$$\omega_n = c\sqrt{\frac{A}{d_n V}},$$

$d_1 = d,$ à l'ordre 1, une canette de soda ne résonne pas,

$d_2 = d + d_{aj},$ à l'ordre 2, on trouve la longueur ajoutée d_{aj},

3. Problème effectif obtenu : à l'ordre 2

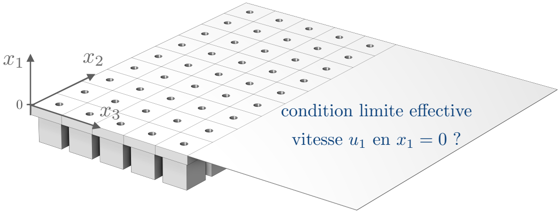


$$\boldsymbol{x}' = (x_2, x_3)$$

$$u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = -\alpha \frac{\partial p_c}{\partial t}(\boldsymbol{x}', t), \qquad \frac{\partial^2 p_c}{\partial t^2} + \omega_H^2 p_c = \omega_H^2 p(0, \boldsymbol{x}', t),$$

$$\alpha = \frac{V}{\rho c^2 h^2} \qquad \omega_H = c\sqrt{\frac{A}{(d + d_{aj})V}},$$

3. Problème effectif obtenu : à l'ordre 2

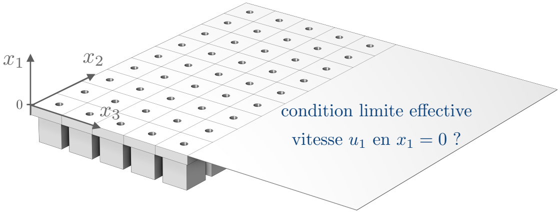


$$\boldsymbol{x}' = (x_2, x_3)$$

$$u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = -\alpha \frac{\partial p_c}{\partial t}(\boldsymbol{x}', t), \qquad \frac{\partial^2 p_c}{\partial t^2} + \omega_H^2 p_c = \omega_H^2 p(0, \boldsymbol{x}', t),$$

$$\alpha = \frac{V}{\rho c^2 h^2} \qquad \omega_H = c\sqrt{\frac{A}{(d + d_{aj})V}}, \qquad d_{aj} = 2\sqrt{A}\mathcal{B},$$

3. Problème effectif obtenu : à l'ordre 2



$$\boldsymbol{x}' = (x_2, x_3)$$

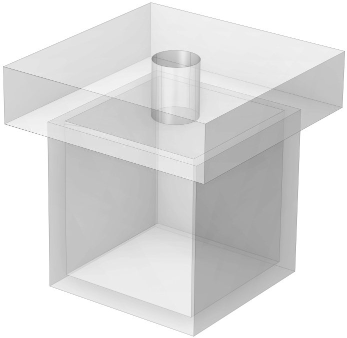
$$u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = -\alpha \frac{\partial p_c}{\partial t}(\boldsymbol{x}', t), \qquad \frac{\partial^2 p_c}{\partial t^2} + \omega_H^2 p_c = \omega_H^2 p(0, \boldsymbol{x}', t),$$

$$\alpha = \frac{V}{\rho c^2 h^2} \qquad \omega_H = c\sqrt{\frac{A}{(d + d_{aj})V}}, \qquad d_{aj} = 2\sqrt{A}\mathcal{B},$$

$\mathcal{B}$ est un paramètre réel sans dimension,
il ne dépend que de la forme de la section du col

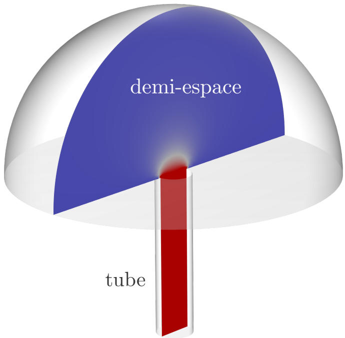
3. Problème effectif obtenu : à l'ordre 2

$$\mathcal{B} = ?$$

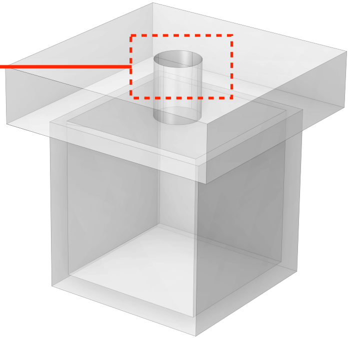


3. Problème effectif obtenu : à l'ordre 2

fluide parfait dans un tube débouchant sur un demi-espace



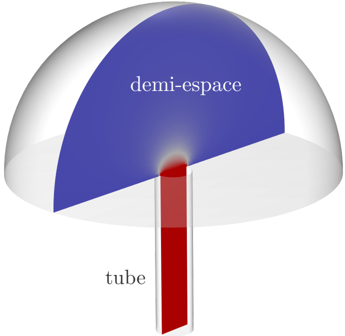
$\mathcal{B} = ?$



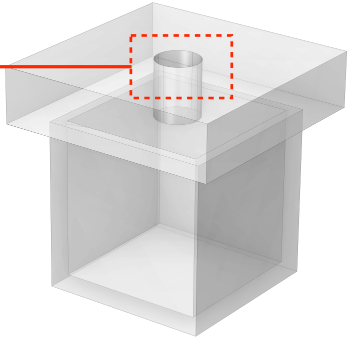
$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}} H = 0, \quad \nabla_{\mathbf{z}} H \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur les parois} \\ H \underset{z_1 \to -\infty}{\sim} z_1 - \mathcal{B}, H \underset{|\mathbf{z}| \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2\pi|\mathbf{z}|} \end{cases}$$

3. Problème effectif obtenu : à l'ordre 2

fluide parfait dans un tube débouchant sur un demi-espace
$\mathcal{B}$ est le coefficient de blocage

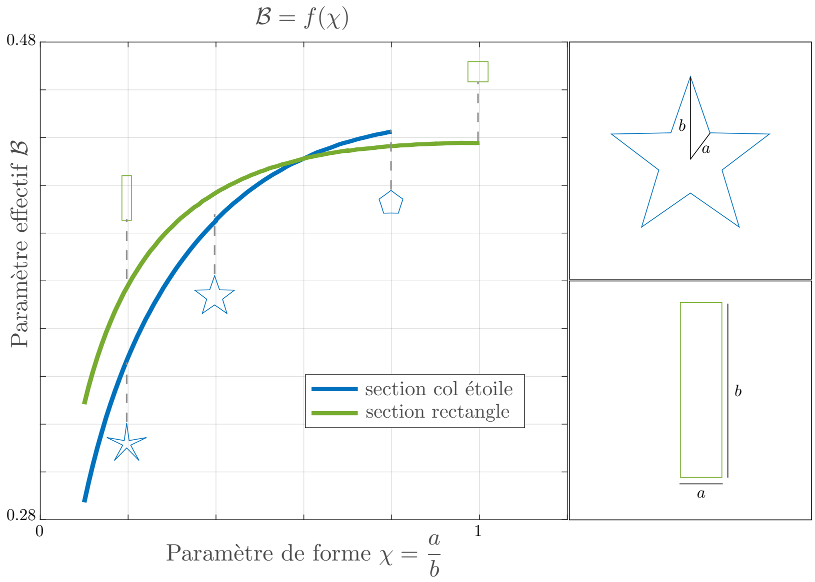


$$\mathcal{B} = ?$$

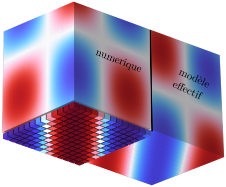


$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{z}} H = 0, \quad \nabla_{\mathbf{z}} H \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur les parois} \\ H \underset{z_1 \to -\infty}{\sim} z_1 - \mathcal{B}, \; H \underset{|\mathbf{z}| \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2\pi|\mathbf{z}|} \end{cases}$$

3. Problème effectif obtenu



4. Validation du modèle : régime harmonique

$u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = 0$		
		

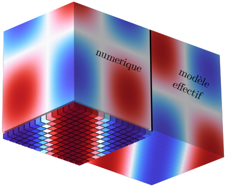
champ de pression P

Ordre 0

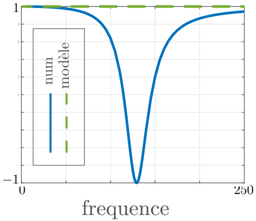
4. Validation du modèle : régime harmonique

$$u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = 0$$

champ de pression P

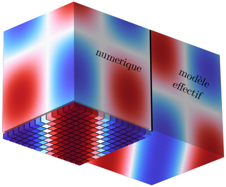
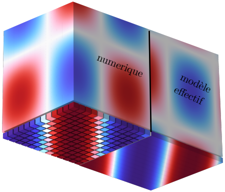
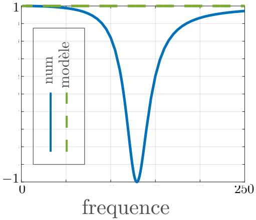


partie réelle de R

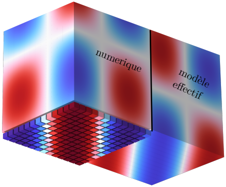
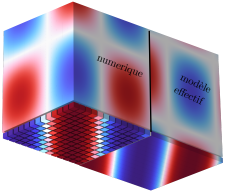
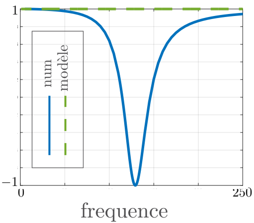
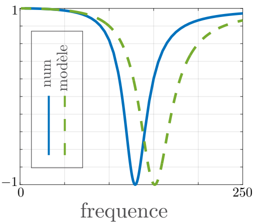


Ordre 0

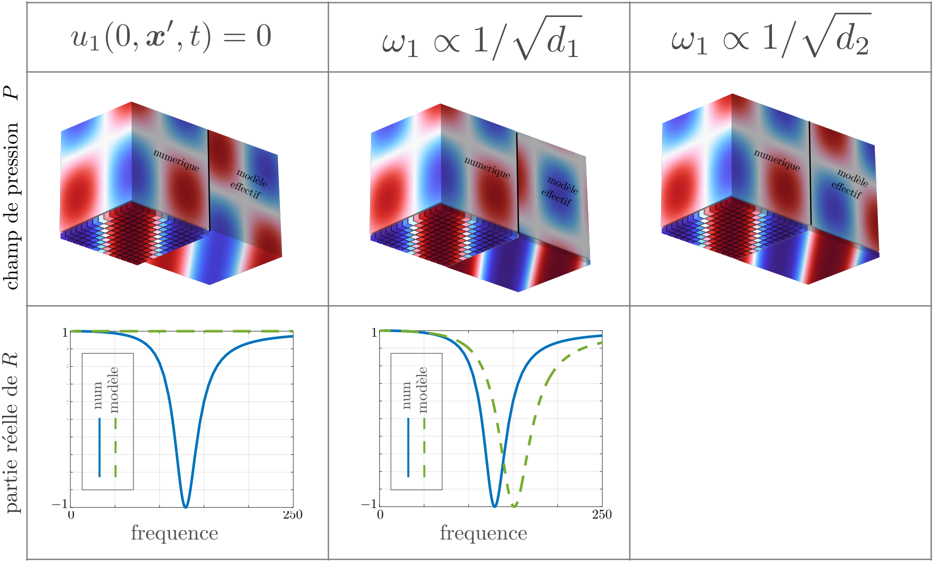
4. Validation du modèle : régime harmonique

	$u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = 0$	$\omega_1 \propto 1/\sqrt{d_1}$	
champ de pression P			
partie réelle de R			
	Ordre 0	Ordre 1	

4. Validation du modèle : régime harmonique

	$u_1(0,\boldsymbol{x}',t) = 0$	$\omega_1 \propto 1/\sqrt{d_1}$	
champ de pression P			
partie réelle de R			
	Ordre 0	Ordre 1	

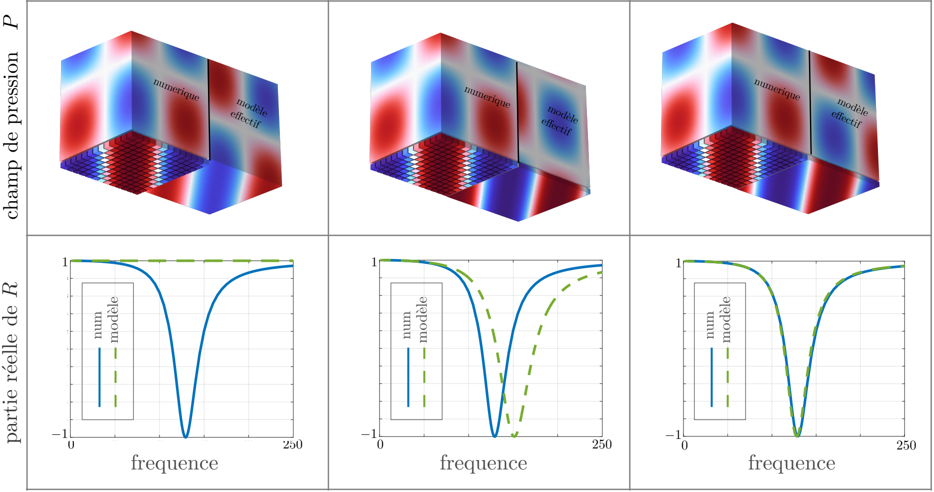
4. Validation du modèle : régime harmonique



Ordre 0 | Ordre 1 | Ordre 2

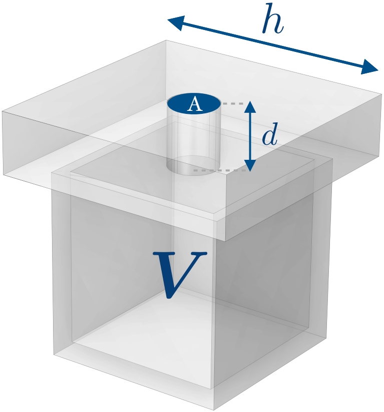
4. Validation du modèle : régime harmonique

$u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = 0$	$\omega_1 \propto 1/\sqrt{d_1}$	$\omega_1 \propto 1/\sqrt{d_2}$

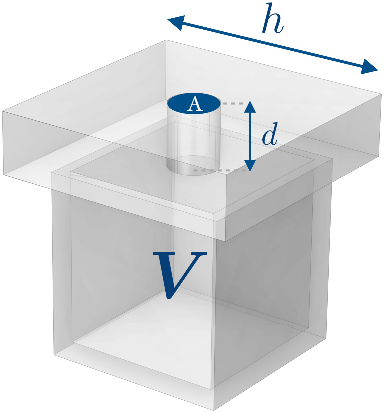


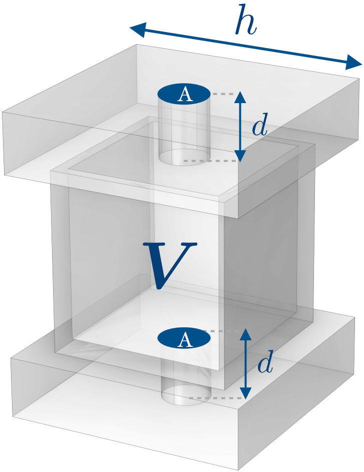
Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2

5. Extension de la méta-surface à la méta-interface

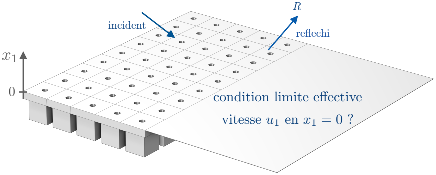


5. Extension de la méta-surface à la méta-interface

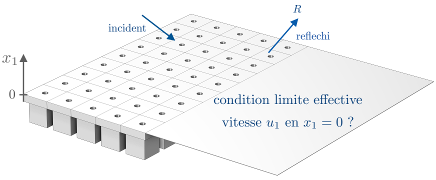


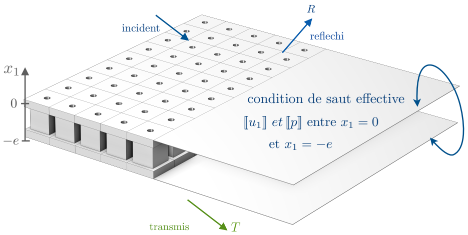


5. Extension de la méta-surface à la méta-interface : problème effectif

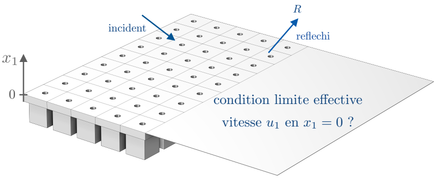


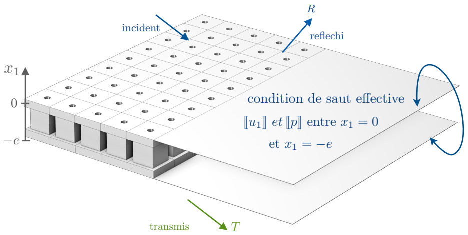
5. Extension de la méta-surface à la méta-interface : problème effectif



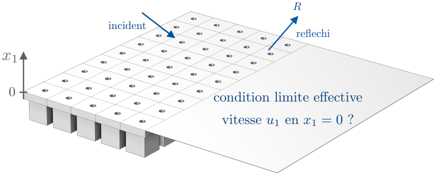


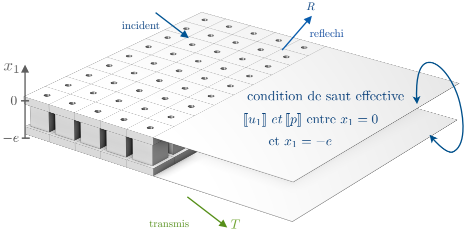
5. Extension de la méta-surface à la méta-interface : problème effectif





$$u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = -\alpha \frac{\partial p_c}{\partial t}(\boldsymbol{x}', t),$$



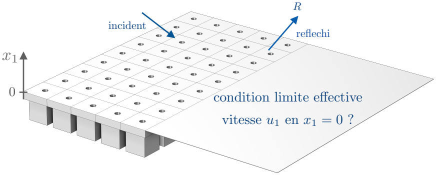


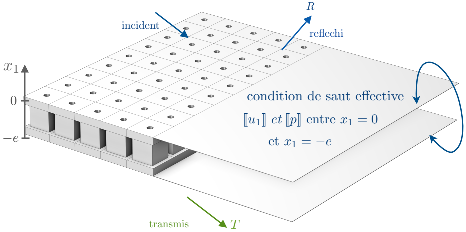
$$u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = -\alpha \frac{\partial p_c}{\partial t}(\boldsymbol{x}', t),$$

$$[\![u_1]\!]\,(0, \boldsymbol{x}', t) = -\alpha \frac{\partial p_c}{\partial t}(\boldsymbol{x}', t),$$

$$[\![f]\!]\,(\boldsymbol{x}', t) = f(0, \boldsymbol{x}', t) - f(-e, \boldsymbol{x}', t)$$

5. Extension de la méta-surface à la méta-interface : problème effectif





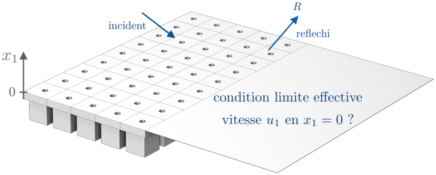
$$u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = -\alpha \frac{\partial p_c}{\partial t}(\boldsymbol{x}', t),$$

$$[\![u_1]\!]\,(0, \boldsymbol{x}', t) = -\alpha \frac{\partial p_c}{\partial t}(\boldsymbol{x}', t),$$

$$[\![f]\!]\,(\boldsymbol{x}', t) = f(0, \boldsymbol{x}', t) - f(-e, \boldsymbol{x}', t)$$

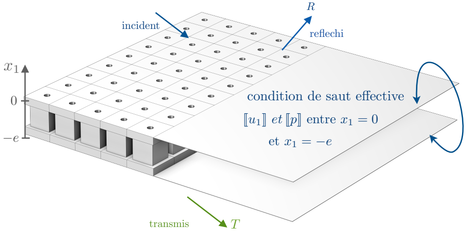
$$\frac{\partial^2 p_c}{\partial t^2} + \omega_H^2 p_c = \omega_H^2 p(0, \boldsymbol{x}', t),$$

5. Extension de la méta-surface à la méta-interface : problème effectif



$$u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = -\alpha \frac{\partial p_c}{\partial t}(\boldsymbol{x}', t),$$

$$\frac{\partial^2 p_c}{\partial t^2} + \omega_H^2 p_c = \omega_H^2 p(0, \boldsymbol{x}', t),$$



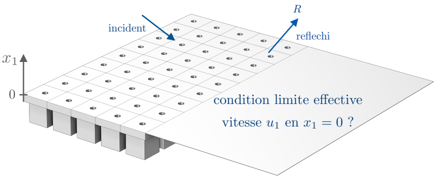
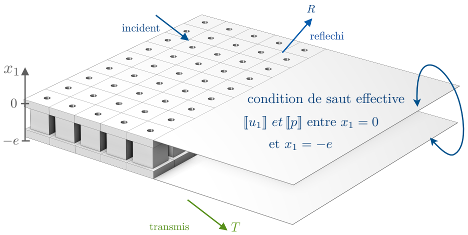
$$[\![u_1]\!]\,(0, \boldsymbol{x}', t) = -\alpha \frac{\partial p_c}{\partial t}(\boldsymbol{x}', t),$$

$$[\![f]\!]\,(\boldsymbol{x}', t) = f(0, \boldsymbol{x}', t) - f(-e, \boldsymbol{x}', t)$$

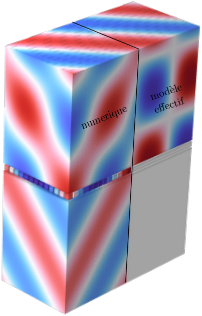
$$\frac{\partial^2 p_c}{\partial t^2}(\boldsymbol{x}', t) + \omega_H^2 p_c(\boldsymbol{x}', t) = \omega_H^2 \overline{p}(\boldsymbol{x}', t),$$

$$\overline{f}(\boldsymbol{x}', t) = \frac{1}{2}\left(f(0, \boldsymbol{x}', t) + f(-e, \boldsymbol{x}', t)\right)$$

5. Extension de la méta-surface à la méta-interface : problème effectif

	
$u_1(0, \boldsymbol{x}', t) = -\alpha \dfrac{\partial p_\mathrm{c}}{\partial t}(\boldsymbol{x}', t),$	$[\![u_1]\!]\,(0, \boldsymbol{x}', t) = -\alpha \dfrac{\partial p_\mathrm{c}}{\partial t}(\boldsymbol{x}', t),$ $[\![f]\!]\,(\boldsymbol{x}', t) = f(0, \boldsymbol{x}', t) - f(-e, \boldsymbol{x}', t)$
$\dfrac{\partial^2 p_\mathrm{c}}{\partial t^2} + \omega_\mathrm{H}^2 p_\mathrm{c} = \omega_\mathrm{H}^2 p(0, \boldsymbol{x}', t),$	$\dfrac{\partial^2 p_\mathrm{c}}{\partial t^2}(\boldsymbol{x}', t) + \omega_\mathrm{H}^2 p_\mathrm{c}(\boldsymbol{x}', t) = \omega_\mathrm{H}^2 \overline{p}(\boldsymbol{x}', t),$ $\overline{f}(\boldsymbol{x}', t) = \dfrac{1}{2}\left(f(0, \boldsymbol{x}', t) + f(-e, \boldsymbol{x}', t)\right)$
	$[\![p]\!]\,(\boldsymbol{x}', t) = -\rho \dfrac{(d + d_{aj})h^2}{A} \dfrac{\partial \overline{u_1}}{\partial t}(\boldsymbol{x}', t)$

5. Extension de la méta-surface à la méta-interface : validation

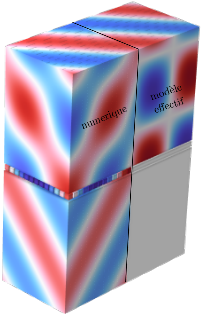
Ordre 0		
		

champ de pression P

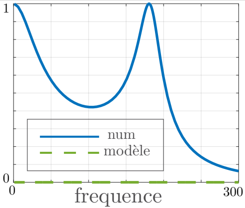
5. Extension de la méta-surface à la méta-interface : validation

Ordre 0

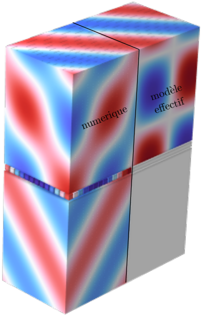
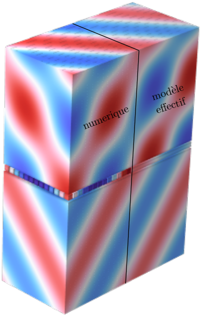
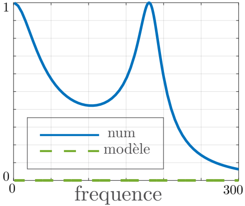
champ de pression P



$|T|$



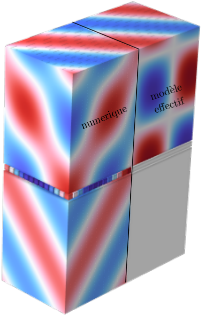
5. Extension de la méta-surface à la méta-interface : validation

	Ordre 0	Ordre 1	
champ de pression P			
$\|T\|$			

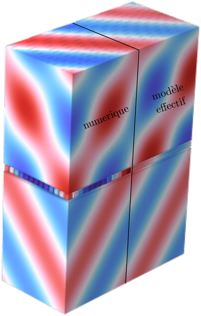
5. Extension de la méta-surface à la méta-interface : validation

champ de pression P

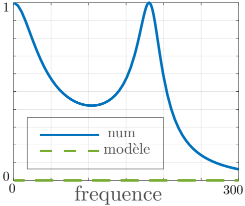
Ordre 0

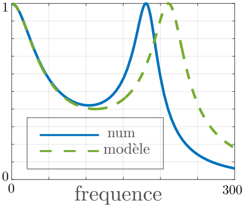


Ordre 1

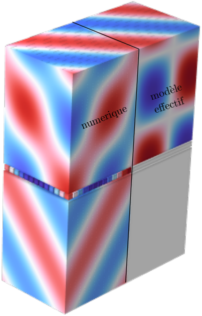
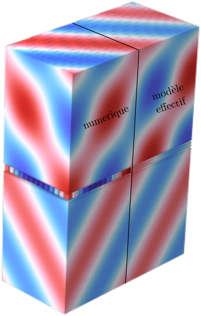
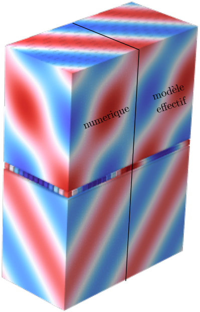
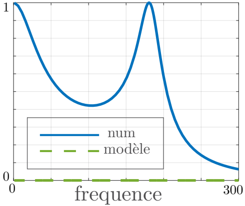
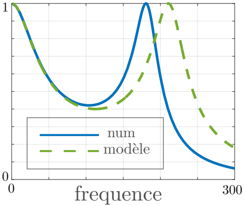


$|T|$

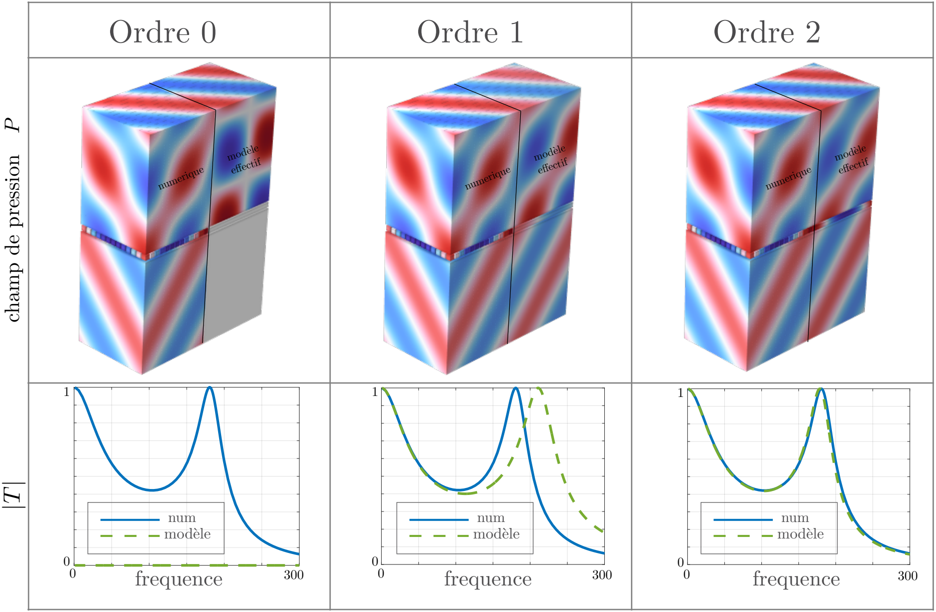




5. Extension de la méta-surface à la méta-interface : validation

	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
champ de pression P			
$\lvert T \rvert$			

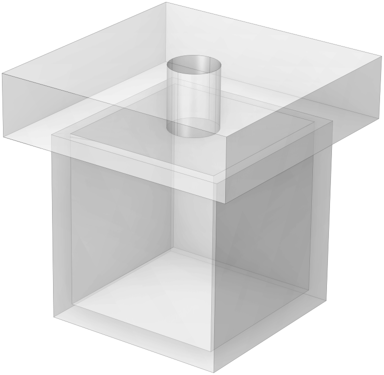
5. Extension de la méta-surface à la méta-interface : validation

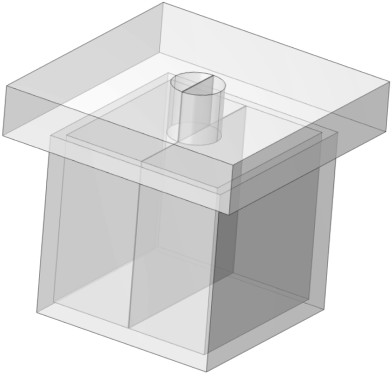


1. Problème étudié
2. Approche asymptotique
3. Problème effectif obtenu
4. Validation du modèle : régime harmonique
5. Extension de la méta-surface à la méta-interface
6. Perspectives

6. Perspectives

- Etudier le cas du réseau de résonateurs de Helmholtz « fendus », pour créer des effets de dipôle;
- Possibilités d'obtenir une absorption parfaite ?





Merci pour votre attention !